

$$\begin{aligned}
 \frac{ds}{dt} &= \frac{(2t+1)(t^2-t-3)}{t^2+1} + (t^2+t+1) \left[\frac{t^2+8t-1}{(t^2+1)^2} \right] \\
 \frac{ds}{dt} &= \frac{2t^3-t^2-7t-3}{t^2+1} + \frac{t^4+9t^3+8t^2+7t-1}{(t^2+1)^2} \\
 \frac{ds}{dt} &= \frac{(t^2+1)(2t^3-t^2-7t-3) + t^4+9t^3+8t^2+7t-1}{(t^2+1)^2} \\
 \frac{ds}{dt} &= \frac{2t^5-t^4-5t^3-4t^2-7t-3+t^4+9t^3+8t^2+7t-1}{(t^2+1)^2} \\
 \frac{ds}{dt} &= \frac{2t^5+4t^3+4t^2-4}{(t^2+1)^2} \\
 \frac{ds}{dt} &= \frac{2(t^5+2t^3+2t^2-2)}{(t^2+1)^2}
 \end{aligned}$$

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA

REGLA DE LA CADENA

La regla de la cadena es una de las herramientas más potentes del cálculo diferencial y es la que le da versatilidad al cálculo de derivadas ya que mediante ella podemos calcular la derivada de funciones tales como:

$$f(x) = (x^{2+1})^{10} \quad \text{o} \quad g(x) = \sqrt{x^3 - 2x + 1}$$

Antes de establecer tan importante regla veamos los siguientes ejemplos de problemas en los que se pide calcular una determinada razón de cambio.

EJEMPLO 1. Supongamos que un automóvil tiene un rendimiento de combustible de 12 km por litro de gasolina. Si la velocidad es tal que consume gasolina a razón de 10 litros por hora. ¿Cuál es la velocidad del automóvil en km/h?

Solución:

Las razones de cambio dadas tienen unidades $\frac{\text{km}}{\text{litro}}$ y $\frac{\text{litro}}{\text{hora}}$ respectivamente. Así es fácil observar que la razón de cambio pedida se puede obtener multiplicando las dos razones de cambio dadas.

$$12 \frac{\text{km}}{\text{litro}} \times 10 \frac{\text{litro}}{\text{hora}} = 120 \frac{\text{km}}{\text{hora}}$$

Es importante recalcar que el consumo de gasolina del automóvil depende del rendimiento de combustible de su motor.

EJEMPLO 2. Supongamos que una "fuerte" masa de de aire frío ("norte") entra a la península de Yucatán y la temperatura desciende a razón de 3 grados Fahrenheit por hora. Puesto que hay 5/9 de grados Centígrados por cada grado Fahrenheit, hallar la razón a la que baja la temperatura en la península en grados Centígrados por hora.

Solución:

Nuevamente la razón de cambio pedida se puede obtener multiplicando las dos razones de cambio dadas, esto es:

$$\frac{5 \text{ grados } C}{9 \text{ grados } F} \times 3 \frac{\text{grados } F}{\text{hora}} = \frac{5 \text{ grados } C}{3 \text{ hora}}$$

Podemos ver que el hecho de multiplicar las razones de cambio hace que las unidades de la razón de cambio pedida sean congruentes, lo cual no es casual ya que existe una dependencia entre las razones de cambio dadas. En este sentido y siguiendo la misma metodología resolvamos el siguiente problema.

EJEMPLO 3. Supongamos que la población y de peces grandes en un estanque de cultivo es una función $y = f(u) = 4\sqrt{u} + 100$, donde u representa la cantidad de peces pequeños, de los cuales se alimentan. Asimismo la población de peces pequeños depende de la cantidad x de tiempo en meses de permanencia en el estanque tal que $u = g(x) = 4x^2 + 500$. Determinar la tasa de crecimiento de los peces grandes con respecto al tiempo de permanencia en el estanque.

Solución:

Puesto que la población de peces grandes esta dada por $y = 4\sqrt{u} + 100$, entonces la tasa de crecimiento de la población de peces grandes con respecto al número de peces pequeños esta dada por $\frac{dy}{du}$ así:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{du} &= 4 \left[\frac{1}{2} (u)^{-1/2} \right] \\ &= \frac{2}{\sqrt{u}} \frac{\text{peces grandes}}{\text{peces pequeños}} \end{aligned}$$

Como la población de peces pequeños esta dada por $u = 4x^2 + 500$, entonces la tasa de crecimiento de los peces pequeños con respecto al tiempo de permanencia en el estanque esta dada por $\frac{du}{dx}$, así:

$$\frac{du}{dx} = 8x \frac{\text{peces pequeños}}{\text{mes}}$$

Ahora siguiendo la metodología aplicada en los ejemplos anteriores, la tasa de crecimiento de los peces grandes con respecto al tiempo de permanencia la hallamos multiplicando las dos tasas de crecimiento, así:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \left(\frac{dy}{du} \right) \left(\frac{du}{dx} \right) = \frac{2}{\sqrt{u}} \frac{\text{peces grandes}}{\text{peces pequeños}} \times 8x \frac{\text{peces pequeños}}{\text{mes}} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{16x}{\sqrt{u}} \frac{\text{peces grandes}}{\text{mes}} \end{aligned}$$

Ahora como $u = 4x^2 + 500$, tenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{16x}{\sqrt{4x^2 + 500}} \frac{\text{peces grandes}}{\text{mes}}$$

simplificando

$$\frac{dy}{dx} = \frac{16x}{2\sqrt{x^2 + 125}} = \frac{8x}{\sqrt{x^2 + 125}} \frac{\text{peces grandes}}{\text{mes}}$$

Puesto que en el ejemplo anterior la población de peces grandes depende de la población de peces pequeños que a su vez depende del tiempo, queda claro que a final de cuentas la población de peces grandes también depende del tiempo de tal forma que:

$$\begin{aligned} y &= f(u) = f(g(x)) = f \circ g \\ y &= 4\sqrt{4x^2 + 500} + 100 \end{aligned}$$

Lo cual nos muestra que y es la composición de f y g , por lo que de acuerdo a la solución del problema

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \left(\frac{dy}{du} \right) \left(\frac{du}{dx} \right) \\ &= f'(u)g'(x) \\ &= f'(g(x))g'(x) \end{aligned}$$

El proceso anterior se puede generalizar mediante la siguiente regla denominada regla de la cadena para la derivación de funciones compuestas.

REGLA DE LA CADENA

Sea $y = f(u)$ una función derivable de u y sea u una función derivable de x tal que $u = g(x)$, entonces $y = f(g(x))$ es también una función derivable de x tal que:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{du} \right) \left(\frac{du}{dx} \right) = f'(g(x))g'(x)$$

Quando se aplica la regla de la cadena es útil pensar en $f \circ g$ como formado por dos partes una interior y otra exterior de tal forma que:

$$\begin{array}{c} \text{exterior} \\ y = f(g(x)) = \overbrace{f(u)} \\ \underbrace{u = g(x)} \\ \text{interior} \end{array}$$

EJEMPLO 4. Consideremos la función: $y = (x^2 + 2)^3$, tenemos que

$$y = (\underbrace{x^2 + 2}_{\text{interior}})^3 = \overbrace{u^3}^{\text{exterior}}$$

Para calcular su derivada aplicamos la regla de la cadena como sigue:

$$\frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} \text{derivada de} \\ \text{la función} \\ \text{exterior} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{derivada de} \\ \text{la función} \\ \text{interior} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{dy}{du} \right) \left(\frac{du}{dx} \right)$$

$$= 3u^2 \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= 3(x^2 + 2)^2 (2x)$$

$$= 6x(x^2 + 2)^2$$

EJEMPLO 5. Sea la función $y = (5x - 4x^2)^4$, calcular y'

Una forma común que se emplea para aplicar la regla de la cadena es elegir previamente en la función dada la función interior u . La forma más frecuente con que se presentan las funciones compuestas es $y = u^n$, de tal forma que por lo general se elige u la función $f(x)$ que está elevada a la potencia n . En este caso

$$u = 5x - 4x^2 \longrightarrow y = u^4$$

Así

$$y' = 4u^3 \cdot \frac{du}{dx} \longrightarrow \frac{du}{dx} = 5 - 8x$$

Por lo tanto

$$y' = 4(5x - 4x^2)^3 (5 - 8x)$$

Como ya se mencionó las funciones de los ejemplos anteriores tienen la forma:

$$y = u^n, \text{ donde } u = f(x)$$

O de otra forma:

$$y = \underbrace{[f(x)]^n}_{\text{interior}} = \overbrace{u^n}^{\text{exterior}}$$

$\text{interior} \quad u \quad \text{interior}$

Si aplicamos la regla de la cadena para obtener su derivada tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = n u^{n-1} \cdot \frac{du}{dx}$$

La expresión anterior constituye la llamada regla generalizada para el cálculo de la derivada de una potencia y representa un caso particular de la regla de la cadena.

REGLA GENERAL DE LAS POTENCIAS

Sea $y = [f(x)]^n$, donde $f(x)$ es una función derivable de x y n un número racional entonces:

$$\frac{dy}{dx} = n [f(x)]^{n-1} f'(x)$$

De otra forma:

Sea $y = u^n$, donde u es una función derivable de x y n es un número racional, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = n u^{n-1} \cdot D_x u$$

EJEMPLO 6. Sea $y = (x^3 - 3x + 4)^6$, calcular $\frac{dy}{dx}$.

Aplicando la regla general de las potencias, tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = 6 (x^3 - 3x + 4)^5 (3x^2 - 3)$$

$$\frac{dy}{dx} = (18x^2 - 18) (x^3 - 3x + 4)^5$$

EJERCICIO RESUELTOS

Dadas las siguientes funciones calcular su derivada

1. $f(x) = (6x - x^4)^{3/2}$

2. $s(t) = \sqrt{2t^2 - 4t + 1}$

3. $f(x) = \sqrt[3]{5x^2 - 6}$

4. $y = \frac{4x}{\sqrt{9 - x^2}}$

5. $g(x) = \left(\frac{x}{2x^2 + 4} \right)^2$

6. $f(r) = 2r(6r - 18)^6$

7. $f(x) = \frac{1}{(x^2 - 4x)^2}$

8. $h(w) = \sqrt{w - 1}(w - 2)^3$

9. $f(x) = \sqrt[3]{\frac{2x}{x+1}}$

10. $g(t) = \sqrt{t - 1} + \sqrt{t + 1}$

SOLUCIONES:

1. Considerando $u = 6x - x^4$, entonces $f(x) = u^{3/2}$, así aplicando la regla generalizada de las potencias

$$f'(x) = \frac{3}{2} u^{-1/2} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2} (6x - x^4)^{-1/2} (6 - 4x^3)$$

$$f'(x) = \frac{3(6 - 4x^3)}{2(6x - x^4)^{1/2}} = \frac{3(2)(3 - 2x^3)}{2(6x - x^4)^{1/2}}$$

$$f'(x) = \frac{3(3 - 2x^3)}{\sqrt{6x - x^4}}$$

2. La función dada $s(t) = \sqrt{2t^2 - 4t + 1}$, la podemos reescribir como $s(t) = (2t^2 - 4t + 1)^{1/2}$ y aplicar la regla generalizada de las potencias, así

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} (2t^2 - 4t + 1)^{-1/2} (4t - 4)$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{4t - 4}{2(2t^2 - 4t + 1)^{1/2}} = \frac{4(t - 1)}{2(2t^2 - 4t + 1)^{1/2}}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2(t - 1)}{\sqrt{2t^2 - 4t + 1}}$$

3. De la misma forma que el ejercicio anterior la función dada la podemos escribir como $f(x) = (5x^2 - 6)^{1/3}$

y aplicar la regla generalizada de las potencias, así

$$f'(x) = \frac{1}{3} (5x^2 - 6)^{-2/3} (10x)$$

$$f'(x) = \frac{10x}{3(5x^2 - 6)^{2/3}}$$

$$f'(x) = \frac{10x}{3\sqrt[3]{(5x^2 - 6)^2}}$$

4. La función dada $y = \frac{4x}{\sqrt{9 - x^2}}$ es un cociente por lo que hay que aplicar la regla del cociente y en el

momento requerido aplicar la regla de la cadena. Podemos reescribir la función como:

$$y = \frac{4x}{(9 - x^2)^{1/2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(9 - x^2)^{1/2} (4) - 4x \left(\frac{1}{2}\right) (9 - x^2)^{-1/2} (-2x)}{\left[(9 - x^2)^{1/2}\right]^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4(9 - x^2)^{1/2} + \frac{8x^2}{2(9 - x^2)^{1/2}}}{(9 - x^2)} = \frac{4(9 - x^2)^{1/2} + \frac{4x^2}{(9 - x^2)^{1/2}}}{(9 - x^2)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4(9-x^2) + 4x^2}{(9-x^2)^{1/2}} = \frac{36-4x^2+4x^2}{(9-x^2)^{3/2}}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{36}{(9-x^2)^{3/2}}}$$

5. Puesto que $g(x) = \left(\frac{x}{2x^2+4}\right)^2$, podemos aplicar la regla generalizada de las potencias

$$g'(x) = 2 \left(\frac{x}{2x^2+4}\right) \left[\frac{(2x^2+4)(1) - x(4x)}{(2x^2+4)^2} \right]$$

$$g'(x) = 2 \left(\frac{x}{2x^2+4}\right) \left[\frac{2x^2+4-4x^2}{(2x^2+4)^2} \right]$$

$$\boxed{g'(x) = \frac{2x(4-2x^2)}{(2x^2+4)^3}}$$

6. La función $f(r) = 2r(6r-18)^6$, implica un producto por lo que de entrada hay que aplicar la regla del producto y en su momento aplicar la regla de la cadena.

$$f'(r) = 2 \left[r(6)(6r-18)^5(6) + (6r-18)^6(1) \right]$$

$$f'(r) = 2(6r-18)^5 [36r + (6r-18)]$$

$$\boxed{f'(r) = 2(6r-18)^5(42r-18)}$$

7. La función dada $f(x) = \frac{1}{(x^2-4x)^2}$, la podemos reescribir como

$$f(x) = (x^2-4x)^{-2}$$

Así aplicando la regla de las potencias tenemos:

$$f'(x) = (-2)(x^2-4x)^{-3}(2x-4)$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-2(2x-4)}{(x^2-4x)^3}}$$

8. La función $h(w) = \sqrt{w-1}(w-2)^3$, es un producto de funciones compuestas, por lo que hay que aplicar la regla del producto, así

$$h(w) = (w-1)^{1/2}(w-2)^3$$

$$h'(w) = (w-1)^{1/2}(3)(w-2)^2(1) + (w-2)^3\left(\frac{1}{2}\right)(w-1)^{-1/2}(1)$$

$$h'(w) = (w-1)^{1/2} (3) (w-2)^2 + \frac{(w-2)^3}{2(w-1)^{1/2}}$$

$$h'(w) = \frac{6(w-1)(w-2)^2 + (w-2)^3}{2(w-1)^{1/2}}$$

$$h'(w) = \frac{(w-2)^2 [6(w-1) + (w-2)]}{2(w-1)^{1/2}}$$

$$\boxed{h'(w) = \frac{(w-2)^2 (7w-3)}{2(w-1)^{1/2}}}$$

9. La función dada $f(x) = \sqrt[3]{\frac{2x}{x+1}}$, la podemos reescribir como:

$$f(x) = \left(\frac{2x}{x+1} \right)^{1/3}, \text{ así}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{2x}{x+1} \right)^{-2/3} \left[\frac{(x+1)(2) - 2x(1)}{(x+1)^2} \right]$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{2x}{x+1} \right)^{-2/3} \left(\frac{2x+2-2x}{(x+1)^2} \right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \frac{(2x)^{-2/3}}{(x+1)^{-2/3}} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{2(2x)^{-2/3}}{3(x+1)^{4/3}}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3(2x)^{2/3}(x+1)^{4/3}}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{4x^2(x+1)^4}}}$$

10. La función dada $g(t) = \sqrt{t-1} + \sqrt{t+1}$, es una suma de funciones por lo que aplicamos la regla de la suma.

Podemos reescribir la función como

$$g(t) = (t-1)^{1/2} + (t+1)^{1/2}$$

$$g'(t) = \frac{1}{2}(t-1)^{-1/2}(1) + \frac{1}{2}(t+1)^{-1/2}(1)$$

$$g'(t) = \frac{1}{2(t-1)^{1/2}} + \frac{1}{2(t+1)^{1/2}}$$

$$g'(t) = \frac{(t+1)^{1/2} + (t-1)^{1/2}}{2(t-1)^{1/2}(t+1)^{1/2}}$$

$$g'(t) = \frac{\sqrt{t+1} + \sqrt{t-1}}{2\sqrt{(t+1)(t-1)}}$$

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Hasta ahora hemos visto cómo encontrar la derivada de funciones explícitas, esto es, funciones en las que la variable dependiente está definida explícitamente en términos de la variable independiente tales como:

$$y = x^5; \quad S = 3t^2 + 2t - 1, \quad u = \frac{4w}{\sqrt{s-w}}$$

Sin embargo no siempre es posible o resulta muy difícil despejar la variable dependiente en términos de la variable independiente y entonces se tiene lo que llamamos **funciones implícitas**, de las que a continuación se dan algunos ejemplos.

$$5y^2x - 6y + 8x^2 - 12 = 0, \quad x^3 - 7xy + 2y^2 = 9, \quad x^3 - 2xy + 2y^2 = 6$$

Para las ecuaciones dadas en los ejemplos anteriores se dice que definen implícitamente a y como una función de x , es decir se considera que $y = f(x)$, ahora bien ¿cómo proceder si se nos pide calcular dy/dx ? Afortunadamente no es necesario hacer explícita la ecuación para poder calcular dy/dx . Esto es posible por la potente herramienta que es la regla de la cadena.

La derivación implícita es la técnica que se utiliza para derivar funciones sin que sea necesario despejar la variable dependiente en términos de la variable independiente y se basa en la regla de la cadena. Consiste en considerar que la variable dependiente es una función derivable de la variable independiente, es decir si y representa a la variable dependiente y x a la variable independiente, entonces:

$$y = f(x) \quad y \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

Así, por ejemplo si y es una función derivable de x y $z = 5y^3$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= 15y^2 \frac{dy}{dx} \\ &\text{o} \\ \frac{d}{dx}(5y^3) &= 15y^2 \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

De tal forma que al derivar una función implícita derivamos término a término y aquellos términos en donde aparece la variable dependiente (y) aplicamos la regla de la cadena. Mostraremos mediante un ejemplo la aplicación de la técnica de derivación implícita.

EJEMPLO 1. Hallar la derivada de la ecuación $y^3x - 3y + 4x^2 - 6 = 0$

Para encontrar $\frac{dy}{dx}$ es necesario derivar término a término usando en cada caso la regla de derivación correspondiente (suma, producto, cociente). Dado que la

variable y se considera una función derivable de x , los términos que la contengan se derivarán utilizando la regla de la cadena, esto es se considera a la variable y , como una función compuesta.

Así tenemos derivando término a término

$$\frac{d}{dx} (y^3 x) - 3 \frac{d}{dx} (y) + 4 \frac{d}{dx} (x^2) - \frac{d}{dx} (6) = \frac{d}{dx} (0)$$

En el primer término usamos la regla del producto y al derivar y^3 y y usamos la regla de la cadena

$$y^3 (1) + x (3y^2) \frac{dy}{dx} - 3 \frac{dy}{dx} + 4 (2x) - 0 = 0$$

$$y^3 + 3xy^2 \frac{dy}{dx} - 3 \frac{dy}{dx} + 8x = 0$$

Ahora resolvemos la ecuación para $\frac{dy}{dx}$

$$3xy^2 \frac{dy}{dx} - 3 \frac{dy}{dx} = -8x - y^3$$

$$\frac{dy}{dx} (3xy^2 - 3) = - (8x + y^3)$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = - \frac{8x + y^3}{3xy^2 - 3}}$$

Es común utilizar el símbolo y' en vez de $\frac{dy}{dx}$ cuando se aplica la derivación implícita.

EJEMPLO 2. Calcular $\frac{dy}{dx}$, si $3y^2 + 2xy + 5x^2 = 6$

Derivando implícitamente tenemos:

$$3 (2y) y' + 2 [xy' + y (1)] + 10x = 0$$

$$6yy' + 2xy' + 2y + 10x = 0$$

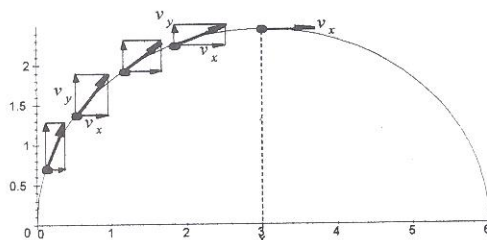
$$y' (6y + 2x) = -10x - 2y$$

$$y' = \frac{-10x - 2y}{6y + 2x} = \frac{-2 (5x + y)}{2 (x + 3y)}$$

$$\boxed{y' = - \frac{5x + y}{x + 3y}}$$

EJEMPLO 3. Se dispara un proyectil el cual describe una trayectoria dada por la ecuación $2x^2 - 12x + 3y^2 = 0$ ¿A que distancia horizontal desde el sitio de lanzamiento se encontrará el proyectil en desplazamiento horizontal? (x e y están en km).

Solución.- Veamos en la siguiente gráfica la trayectoria del proyectil



En la gráfica podemos observar que la componente v_y del vector velocidad v cada vez es más pequeño, hasta el punto en que $v_y = 0$ por lo que el proyectil ya no sigue subiendo y entonces comenzará a descender, es en ese preciso instante en donde el proyectil tiene trayectoria horizontal. Ahora bien, geoméricamente se cumple en ese punto que la pendiente de la gráfica vale cero, por consiguiente $\frac{dy}{dx} = 0$.

Derivando implícitamente con respecto a x tenemos:

$$2 \frac{d}{dx} (x^2) - 12 \frac{d}{dx} (x) + 3 \frac{d}{dx} (y^2) = \frac{d}{dx} (0)$$

$$2(2x) - 12(1) + 3(2y)y' = 0$$

$$4x - 12 + 6yy' = 0$$

$$6yy' = 12 - 4x$$

$$y' = \frac{12 - 4x}{6y} = \frac{2(6 - 2x)}{6y}$$

$$\boxed{y' = \frac{6 - 2x}{3y}}$$

Puesto que $y' = 0$, solo si $6 - 2x = 0$ entonces:

$$6 - 2x = 0$$

$$6 = 2x \longrightarrow x = \frac{6}{2} = 3$$

Así el proyectil tendrá desplazamiento horizontal en el instante en que esté a una distancia horizontal igual a 3 km del sitio de lanzamiento.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. $x^2 y^2 = x^2 + y^2$

3. $y^2 - xy + x^3 = 1$

5. $\sqrt{8xy} = 2x - 2y$

7. $x^2 y^2 + 9y^2 = x^2 - 9$

2. $xy^2 + 2y^3 = x - 2y$

4. $2x^3 - 4x^2 y + 6xy^2 = 38$

6. $x^2 (x^2 + y^2) = y^2$

8. $x^{1/3} + y^{1/3} = 9$

SOLUCIONES

1. $x^2y^2 = x^2 + y^2$

$$\frac{d}{dx}(x^2y^2) = \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2)$$

$$x^2(2yy') + y^2(2x) = 2x + 2yy'$$

$$2x^2yy' + 2xy^2 = 2x + 2yy'$$

$$2x^2yy' - 2yy' = 2x - 2xy^2$$

$$y'(2x^2y - 2y) = 2x - 2xy^2$$

$$y' = \frac{2(x - xy^2)}{2(x^2y - y)} \rightarrow y' = \frac{x - xy^2}{x^2y - y}$$

2. $xy^2 + 2y^3 = x - 2y$

$$\frac{d}{dx}(xy^2) + \frac{d}{dx}(2y^3) = \frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(2y)$$

$$x(2yy') + y^2(1) + 6y^2y' = 1 - 2y'$$

$$2xyy' + 6y^2y' + 2y' = 1 - y^2$$

$$y'(2xy + 6y^2 + 2) = 1 - y^2$$

$$y' = \frac{1 - y^2}{2xy + 6y^2 + 2}$$

3. $y^2 - xy + x^3 = 1$

$$\frac{d}{dx}(y^2) - \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(x^3) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$2yy' - [xy' + y(1)] + 3x^2 = 0$$

$$2yy' - xy' - y + 3x^2 = 0$$

$$y'(2y - x) = y - 3x^2$$

$$y' = \frac{y - 3x^2}{2y - x}$$

4. $2x^3 - 4x^2y + 6xy^2 = 38$

$$\frac{d}{dx}(2x^3) - \frac{d}{dx}(4x^2y) + \frac{d}{dx}(6xy^2) = \frac{d}{dx}(38)$$

$$6x^2 - 4[x^2y' + y(2x)] + 6[x(2y)y' + y^2(1)] = 0$$

$$6x^2 - 4x^2y' - 8xy + 12xyy' + 6y^2 = 0$$

$$y'(12xy - 4x^2) = 8xy - 6x^2 - 6y^2$$

$$y' = \frac{8xy - 6x^2 - 6y^2}{12xy - 4x^2} = \frac{2(4xy - 3x^2 - 3y^2)}{4(3xy - x^2)}$$

$$y' = \frac{4xy - 3x^2 - 3y^2}{2(3xy - x^2)}$$

$$5. \sqrt{8xy} = 2x - 2y$$

$$\frac{d}{dx} (\sqrt{8xy}) = \frac{d}{dx} (2x) - \frac{d}{dx} (2y)$$

$$\frac{1}{2} (8xy)^{-1/2} 8 [xy' + y(1)] = 2 - 2y'$$

$$\frac{4 [xy' + y(1)]}{(8xy)^{1/2}} = 2 - 2y'$$

$$4 [xy' + y(1)] = (8xy)^{1/2} (2 - 2y')$$

$$4xy' + 4y = 2(8xy)^{1/2} - 2y'(8xy)^{1/2}$$

$$4xy' + 2y'(8xy)^{1/2} = 2(8xy)^{1/2} - 4y$$

$$y' [4x + 2(8xy)^{1/2}] = 2(8xy)^{1/2} - 4y$$

$$y' = \frac{2(8xy)^{1/2} - 4y}{4x + 2(8xy)^{1/2}} = \frac{2[(8xy)^{1/2} - 2y]}{2[2x + (8xy)^{1/2}]}$$

$$\boxed{y' = \frac{\sqrt{8xy} - 2y}{2x + \sqrt{8xy}}}$$

$$6. x^2 (x^2 + y^2) = y^2$$

$$\frac{d}{dx} [x^2 (x^2 + y^2)] = \frac{d}{dx} (y^2)$$

$$x^2 (2x + 2yy') + (x^2 + y^2) (2x) = 2yy'$$

$$2x^3 + 2x^2yy' + 2x^3 + 2xy^2 = 2yy'$$

$$x^3 + x^2yy' + x^3 + xy^2 = yy'$$

$$x^2yy' - yy' = -2x^3 - xy^2$$

$$y' (x^2y - y) = - (2x^3 + xy^2)$$

$$\boxed{y' = -\frac{2x^3 + xy^2}{x^2y - y}}$$

$$7. x^2y^2 + 9y^2 = x^2 - 9$$

$$\frac{d}{dx} (x^2y^2) + \frac{d}{dx} (9y^2) = \frac{d}{dx} (x^2) - \frac{d}{dx} (9)$$

$$x^2 (2yy') + y^2 (2x) + 18yy' = 2x - 0$$

$$2x^2yy' + 2xy^2 + 18yy' = 2x$$

$$x^2yy' + xy^2 + 9yy' = x$$

$$y' (x^2y + 9y) = x - xy^2$$

$$\boxed{y' = \frac{x - xy^2}{x^2y + 9y}}$$

$$8. x^{1/3} + y^{1/3} = 9$$

$$\frac{d}{dx} (x^{1/3}) + \frac{d}{dx} (y^{1/3}) = \frac{d}{dx} (9)$$

$$\frac{1}{3} x^{-2/3} + \frac{1}{3} y^{-2/3} y' = 0$$

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{y'}{3\sqrt[3]{y^2}} = 0$$

$$\frac{y'}{3\sqrt[3]{y^2}} = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$y' = -\frac{\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\boxed{y' = -\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}}}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

En los ejercicios siguientes calcular las derivadas de las funciones dadas. En los casos en que la función sea implícita utilizar el método de la derivación implícita:

$$1. f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$$

$$3. g(w) = [(x - 2)(x + 4)]$$

$$5. z = \sqrt{3y}(y + 2)^3$$

$$7. S(t) = \left(t^2 + \frac{1}{t}\right)^5$$

$$9. y^2 = (x - 3)(x^2 + y)$$

$$11. z\sqrt{w} - w\sqrt{z} = 16$$

$$13. g(s) = (s^4 - s)^{-3} (5 - s^2)^{-1}$$

$$15. f(x) = \left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right)^2$$

$$17. rs^2 + 4s^3 = r - 2s$$

$$19. \frac{a + 2b}{a - 2b} = a^2$$

$$2. f(s) = \sqrt{s + 1} \sqrt[3]{s + 1}$$

$$4. b^2 z^2 - a^2 w^2 = 3a^2 b^2, \quad a \text{ y } b \text{ son constantes}$$

$$6. y = \frac{1}{3x^3} + \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$8. f(z) = \frac{\sqrt{z} - 1}{\sqrt{z} + 1}$$

$$10. z = \left(\frac{w^3 - 1}{2w^3 + 1}\right)^4$$

$$12. y = \frac{x}{\sqrt{1 - 4x^2}}$$

$$14. f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x - 1}}$$

$$16. x^3 + 3x^2y - 6xy^2 + 2y^3 = 0$$

$$18. y = \frac{2x - y}{x - 2y}$$

$$20. z = \frac{w^2}{\sqrt{4 - w^2}}$$

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

(Derivadas sucesivas de una función)

Para el estudio de las aplicaciones de la función derivada es necesario el concepto de las derivadas sucesivas de una función sobre todo el de la segunda derivada por sus aplicaciones en el cálculo de los máximos y mínimos relativos de una función, en la determinación del sentido de la concavidad de una curva y en los problemas de movimiento uniformemente acelerado porque representa la aceleración del móvil.

Comúnmente a la derivada de una función se le llama también primera derivada, de tal forma que:

$\frac{dy}{dx}$ es la primera derivada

La derivada de la primera derivada se denomina segunda derivada o derivada de orden dos, la cual se representa por:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

La derivada de la segunda derivada es la tercera derivada o derivada de orden 3

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \frac{d^3 y}{dx^3}$$

Y así se puede continuar hasta llegar a la derivada de orden n o n -ésima derivada. A continuación daremos una tabla en la que se muestra la notación de las derivadas sucesivas de una función

Primera derivada	y'	$f'(x)$	$\frac{dy}{dx}$	$D_x(y)$
Segunda derivada	y''	$f''(x)$	$\frac{d^2 y}{dx^2}$	$D_x^2(y)$
Tercera derivada	y'''	$f'''(x)$	$\frac{d^3 y}{dx^3}$	$D_x^3(y)$
Cuarta derivada	y^{IV}	$f^{(IV)}(x)$	$\frac{d^4 y}{dx^4}$	$D_x^4(y)$
.
.
.
n -ésima derivada	y^n	$f^{(n)}(x)$	$\frac{d^n y}{dx^n}$	$D_x^n(y)$

EjemPlo 1. Dada la función $y = 3x^5$ calcular hasta la quinta derivada

$$y' = 15x^4$$

$$y'' = 60x^3$$

$$y''' = 180x^2$$

$$y^{IV} = 360x$$

$$y^V = 360$$

Observa que si continuamos derivando la sexta derivada sería cero y a partir de ella todas las demás serían constantes e iguales a cero.

EJEMPLO 2. Dada la función $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 5x - 1$ calcular $\frac{d^3y}{dx^3}$

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 12x + 5$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x - 12$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 12$$

EJEMPLO 3. Dada la función $y = \sqrt[3]{9 - 15x}$, calcular $D_x^3(y)$

$$D_x(y) = \frac{1}{3} (9 - 15x)^{-2/3} (-15) = -5 (9 - 15x)^{-2/3}$$

$$\begin{aligned} D_x^2(y) &= D_x \left[-5 (9 - 15x)^{-2/3} \right] = \frac{10}{3} (9 - 15x)^{-5/3} (-15) \\ &= -50 (9 - 15x)^{-5/3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_x^3(y) &= D_x \left[-50 (9 - 15x)^{-5/3} \right] = \frac{250}{3} (9 - 15x)^{-8/3} (-15) \\ &= -1250 (9 - 15x)^{-8/3} = -\frac{1250}{(9 - 15x)^{8/3}} \end{aligned}$$

$$D_x^3(y) = -\frac{1250}{(9 - 15x)^{8/3}}$$

CÁLCULO DE LA SEGUNDA DERIVADA POR DERIVACIÓN IMPLÍCITA

EJEMPLO 4. Sea la función $xy + x - 2y - 1 = 0$, calcular y''

Derivando implícitamente tenemos

$$xy' + y + 1 - 2y' - 0 = 0$$

$$xy' - 2y' = -1 - y$$

$$y'(x - 2) = -(1 + y)$$

$$y' = -\frac{(1 + y)}{(x - 2)} = \frac{1 + y}{2 - x}$$

Derivando nuevamente tenemos

$$y'' = \left[\frac{(2 - x)(y') - (1 + y)(-1)}{(2 - x)^2} \right]$$

$$y'' = \left[\frac{(2 - x) \left(\frac{1 + y}{2 - x} \right) - (1 + y)(-1)}{(2 - x)^2} \right]$$

$$y'' = \left[\frac{1 + y + 1 + y}{(2 - x)^2} \right] = \frac{2 + 2y}{(2 - x)^2}$$

$$y'' = \frac{2 + 2y}{(2 - x)^2}$$

EJEMPLO 5. Dado que $x^2 - xy + y^2 = 3$, hallar y''

Derivando implícitamente tenemos:

$$2x - (xy' + y) + 2yy' = 0$$

$$2x - xy' - y + 2yy' = 0$$

$$y'(2y - x) = y - 2x$$

$$y' = \frac{y - 2x}{2y - x}$$

Derivando nuevamente

$$y'' = \frac{(2y - x)(y' - 2) - (y - 2x)(2y' - 1)}{(2y - x)^2}$$

$$y'' = \frac{2yy' - xy' - 4y + 2x - 2yy' + 4xy' + y - 2x}{(2y - x)^2}$$

$$y'' = \frac{-3y + 3xy'}{(2y - x)^2} = \frac{-3y + 3x \left(\frac{y - 2x}{2y - x} \right)}{(2y - x)^2} \quad (\text{en este paso sustituimos } y'$$

por $\frac{y - 2x}{2y - x}$)

$$y'' = \frac{-3y(2y - x) + 3x(y - 2x)}{(2y - x)^3} = \frac{-6y^2 + 3xy + 3xy - 6x^2}{(2y - x)^3}$$

$$y'' = \frac{-6(x^2 - xy + y^2)}{(2y - x)^3}$$

Como $x^2 - xy + y^2 = 3$, podemos simplificar sustituyendo $x^2 - xy + y^2$ por 3, así

$$y'' = -\frac{18}{(2y - x)^2}$$

EJEMPLO 6. Si $x^2 - y^2 = 16$, calcular y''

Derivamos implícitamente

$$2x - 2yy' = 0$$

$$y' = \frac{x}{y}$$

Derivando nuevamente

$$y'' = \frac{y(1) - xy'}{y^2} = \frac{y - xy'}{y^2}$$

$$y'' = \frac{y - x \left(\frac{x}{y} \right)}{y^2} \text{ (sustituyendo el valor de } y') \text{}$$

$$y'' = \frac{\frac{y^2 - x^2}{y}}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = \frac{-(x^2 - y^2)}{y^3} \text{ (sustituyendo } x^2 - y^2 \text{ por 16)}$$

Así

$$\boxed{y'' = -\frac{16}{y^3}}$$

EJEMPLO 7. Como ya hemos visto anteriormente dos razones de cambio importantes son la velocidad y la aceleración de un móvil. Si $s = f(t)$ es la función de posición de un móvil con respecto al tiempo, entonces s' nos da la velocidad y s'' la aceleración. Consideremos que la función de posición de un móvil viene dada por $s^2 - 2st + 2t^2 = 4$, donde s es la distancia en metros y t es el tiempo en segundos. Calcular su velocidad y aceleración en el punto donde $t = 1.2 \text{ seg}$ y $s = 2.8 \text{ m}$.

Solución

$v = s'$, entoces derivando implícitamente tenemos:

$$2ss' - 2(ts' + s) + 4t = 0$$

$$2ss' - 2ts' - 2s + 4t = 0$$

$$s'(2s - 2t) = 2s - 4t$$

$$s' = \frac{2s - 4t}{2s - 2t} = \frac{s - 2t}{s - t}$$

$$v = s'_{(2,1)} = \frac{2.8 - 2(1.2)}{2.8 - 1.2} = \frac{0.4}{1.6} = 0.25 \rightarrow \boxed{v = 0.25 \text{ m/s}}$$

Derivando nuevamente obtenemos s''

$$s'' = \frac{(s - t)(s' - 2) - (s - 2t)(s' - 1)}{(s - t)^2}$$

$$s'' = \frac{ss' - 2s - ts' + 2t - ss' + s + 2ts' - 2t}{(s - t)^2}$$

$$s'' = \frac{-2s - ts' + s + 2ts'}{(s - t)^2} = \frac{ts' - s}{(s - t)^2}$$

Sustituyendo el valor de s'

$$s'' = \frac{t \left(\frac{s - 2t}{s - t} \right) - s}{(s - t)^2} = \frac{t(s - 2t) - s(s - t)}{(s - t)^2}$$

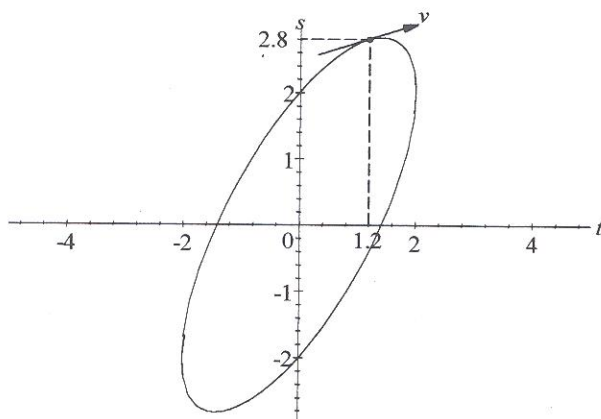
$$s'' = \frac{st - 2t^2 - s^2 + st}{(s - t)^3} = \frac{-(s^2 - 2st + 2t^2)}{(s - t)^3}$$

Sustituyendo $s^2 - 2st + 2t^2$ por 4 tenemos

$$s'' = -\frac{4}{(s-t)^3}, \text{ así para } t = 1.2 \text{ y } s = 2.8$$

$$a = s''_{(2,1)} = -\frac{4}{(2.8-1.2)^3} = -\frac{4}{4.096} = -0.9766 \rightarrow \boxed{a = -0.9766 \text{ m/s}^2}$$

La gráfica de la trayectoria es la siguiente:



EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Dadas las siguientes funciones hallar las derivadas indicadas

Dada

$$f(x) = x^6$$

$$y = \frac{1}{x+1}$$

$$f(t) = t^8 + t^2 - 3$$

$$f(x) = 4x^{3/2} - 8x^{1/2}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$$

$$f(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 2$$

$$z = \frac{1}{2w+1}$$

$$y = \frac{1}{x^2}$$

Hallar

$$f^{VI}(x)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$f'''(t)$$

$$f''(x)$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4}$$

$$g''(x)$$

$$f^{IV}(x)$$

$$z^{(n)}$$

$$y^{(n)}$$

2. Dadas las siguientes funciones calcular su segunda derivada usando derivación implícita

a). $x^2 + y^2 = 5$

b). $yx - y = 1$

c). $x^2 y^2 = y + 1$

d). $2y^3 = x^3 - x$

e). $x^{1/2} + y^{1/2} = 2$

3. Supongamos que la trayectoria de un proyectil está descrita por la ecuación $3x^2 - 14x + 4y^2 = 0$ donde x da la distancia horizontal y y la distancia vertical, ambas en Km desde el sitio de lanzamiento ¿A qué distancia desde el sitio de lanzamiento se encontrará el proyectil en desplazamiento horizontal? Hacer una gráfica de la trayectoria del proyectil.

4. La posición de una partícula en movimiento con respecto al tiempo está dada por la ecuación $s^2 - 2st + t^3 = 4$, donde s representa el desplazamiento en metros y t el tiempo en segundos. Calcular su velocidad y su aceleración en el punto donde $t = 1$ seg y $s = 3$ m.